УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
*Том 152, кн. 1* Физико-математические науки *2010*

УДК 519.6

# О СХЕМАХ МКЭ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

*А.А. Соболев, М.Р. Тимербаев*

**Аннотация**

В статье рассматривается двухточечная краевая задача Дирихле для вырождающегося уравнения 4-го порядка. Эта задача решается методом конечных элементов высокого порядка аппроксимации с мультипликативным выделением особенности. Доказывается оптимальная скорость сходимости предложенного метода на заданном классе правых частей.

**Ключевые слова:** двухточечная краевая задача, весовые пространства Соболева, метод конечных элементов, мультипликативное выделение особенности.

## Введение

Анализ эллиптических уравнений с вырождающимися коэффициентами показывает, что их решения имеют особенности в точках вырождения, связанные с неограниченным ростом производных (см., например, [1–4]). Стандартные проекционно-сеточные методы численного решения таких задач, не учитывающие эти особенности, оказываются малоэффективными и плохо сходящимися. Для преодоления возникающих вычислительных трудностей применяются различные подходы: специальные замены переменных в исходном уравнении, сгущение расчетной сетки в окрестности точек вырождения, использование специальных базисных функций для аппроксимации решения и другие приемы. Так, для вырождающегося уравнения 2-го порядка в [5] была построена конечно-разностная схема 1-го порядка точности на ортотропно-сгущающейся сетке в исходных переменных, которую можно интерпретировать и как схему метода конечных элементов (МКЭ) с численным интегрированием на равномерной сетке в новых координатах при специальной замене переменных. В работе [6] также использовалось ортотропное по направлению к линии вырождения сгущение, то есть линейные размеры конечных элементов триангуляции по вырождающейся переменной уменьшались существенно быстрее, чем по остальным переменным. Равномерное (изотропное) по всем переменным степенное сгущение сетки к точкам вырождения применялось в работах [7–9] для линейных и квазилинейных уравнений 2-го порядка и в работе [10] – для квазилинейного уравнения 4-го порядка. Отметим, что сгущение сетки, хотя и улучшает аппроксимацию решения в окрестности особых точек, но приводит к нежелательным с вычислительной точки зрения эффектам другого рода – к увеличению числа уравнений и неизвестных в результирующей системе МКЭ и ее худшей обусловленности по сравнению с квазиравномерными триангуляциями расчетной области, что было замечено еще в статье [5]. Что касается ухудшения в той или иной степени свойств систем уравнений МКЭ для задач с особенностями по сравнению с регулярными задачами, то это является, по-видимому, неизбежной платой за удовлетворительную или оптимальную аппроксимацию сингулярности.

Для вырождающегося линейного уравнения 2-го порядка в статье [11] был предложен оптимальный с точки зрения теории аппроксимации численный метод для класса правых частей из весового пространства Лебега, то есть наиболее быстро сходящийся в энергетической норме задачи проекционный метод на данном классе входных данных. Метод основывается на мультипликативном выделении особенности, то есть представлении решения в виде произведения специально подобранного сингулярного веса и новой неизвестной функции, которая, как показывают априорные оценки [4], является гладкой и может быть аппроксимирована стандартными кусочно-полиномиальными функциями. Этот метод можно трактовать как МКЭ со специальным базисом, состоящим из произведений сингулярного веса на кусочно-полиномиальные базисные функции обычного МКЭ, поэтому для его реализации могут быть использованы процедуры триангуляции области и генерирования систем уравнений с оптимизацией нумерации узлов сетки, заложенные в стандартных пакетах программ МКЭ.

В настоящей работе мы применяем мультипликативное выделение особенности для дискретизации с высоким порядком точности вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. Ранее для этого уравнения в [12] был построен метод 2-го порядка аппроксимации с кубическими эрмитовыми элементами. Схемы МКЭ высокого порядка аппроксимации для вырождающегося уравнения 2-го порядка анализировались в [13].

## 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Введем в рассмотрение весовые классы функций на интервале $\Omega = (0,1)$. Для вещественного $\gamma$ через $L_{2,\gamma} \equiv L_{2,\gamma}(\Omega)$ (далее символ $\Omega$ будем опускать, когда он подразумевается из контекста) обозначим пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u|L_{2,\gamma}\| = \left( \int\limits_{\Omega} |x^{-\gamma} u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Пусть $s$ – целое неотрицательное число. Множество функций, у которых почти всюду ограничена обобщенная производная порядка $s$, обозначим через $W^s_\infty$. Через $H^s_\gamma$ будем обозначать пространство функций, имеющих обобщенную производную порядка $s$ класса $L_{2,\gamma}$, то есть функций, у которых конечна полунорма $\|D^s u|L_{2,\gamma}\|$, где $D^s$ – оператор обобщенного дифференцирования порядка $s$. Это пространство является гильбертовым с нормой

$$\|u|H^s_\gamma\| = \left(\|D^s u|L_{2,\gamma}\|^2 + \|u|L_2(\delta,1)\|^2\right)^{1/2},$$

где $\delta \in (0,1)$ фиксировано. Иногда удобнее использовать другую, эквивалентную норму

$$\|u|H^s_\gamma\| = \left( \|D^s u|L_{2,\gamma}\|^2 + \sum_{j=0}^{s-1} |D^j u(1)|^2 \right)^{1/2}.$$

Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначается множество бесконечное число раз дифференцируемых функций, имеющих компактные носители в интервале $\Omega$. Замыкание множества функций $C_0^\infty$ в норме пространства $H^s_\gamma$ обозначим через $\mathring{H}^s_\gamma$. Замыкание в $H^s_\gamma$ бесконечно дифференцируемых финитных в окрестности точки $x = 1$ функций обозначим через $\dot{H}^s_\gamma$. При $\gamma = 0$ этот символ в обозначениях пространств будет опускаться.

Нам понадобятся следующие вложения, доказательство которых можно найти в [13, 14], [15, с. 378], [16, с. 319].

**Теорема 1.**

(i) *Пространство* $H^m_\alpha$ *непрерывно вложено в пространство* $H^k_\beta$ $(H^m_\alpha \subset H^k_\beta)$ *тогда и только тогда, когда выполнены неравенства* $k < m$, $\beta < 1/2$ *и* $m + \alpha - k - \beta \geq 0$*; если последнее неравенство строгое, то данное вложение компактно.*

(ii) *Если* $\gamma > -1/2$, *то пространство* $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma = \{u \in H^s_\gamma : D^k u(0) = D^k u(1) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, s-1\}$;

*если* $\gamma + s < 1/2$, *то* $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma = \dot{H}^s_\gamma = \{u \in H^s_\gamma : D^k u(1) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, s-1\}$.

(iii) *Пространство* $\overset{\circ}{H}{}^s_\gamma$ *непрерывно вложено в пространство* $\overset{\circ}{H}{}^{s-k}_{\gamma+k}$ *при* $k = 0, 1, \ldots, s$.

(iv) *Пространство* $H^s_\gamma$ *вложено в* $C^{s-1}[0,1]$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma > -1/2$*; при этом данное вложение компактно.*

(v) *Пусть* $U$ *– произвольное нормированное пространство. Для того чтобы линейный непрерывный оператор* $L : U \to H^s_\gamma$ *был компактен, необходимо и достаточно, чтобы был компактен оператор* $D^s L : U \to L_{2,\gamma}$.

Для произвольного вещественного $\mu$ определим интегральный оператор Харди

$$K_\mu u(x) = x^{\mu-1} \int\limits_0^x y^{-\mu} u(y)\, dy.$$

Естественной областью определения $\operatorname{dom} K_\mu$ оператора Харди $K_\mu$ является множество измеримых на $\Omega$ функций $u(y)$, для которых функция $y^{-\mu}u(y)$ интегрируема по Лебегу на интервале $(0, x)$ для каждого $x \in (0, 1)$.

**Теорема 2 [4].** *Для оператора Харди справедливы утверждения:*
(i) *если* $\mu < \min(1, \gamma + s + 1/2)$, *то* $K_\mu$ *непрерывен как оператор из* $H^s_\gamma$ *в* $H^s_\gamma$;
(ii) *для* $\mu \neq \nu$ *имеет место псевдорезольвентное тождество*

$$K_\mu K_\nu = K_\nu K_\mu = \frac{1}{\mu - \nu}(K_\mu - K_\nu);$$

(iii) *для оператора Харди справедливы формулы дифференцирования:*
*если* $u \in \operatorname{dom} K_\mu$, *то* $xDK_\mu u = u + (\mu - 1)K_\mu u$;
*если еще* $Du \in \operatorname{dom} K_\mu$, *то* $DK_\mu u = K_{\mu-1} Du$.

## 2. Постановка задачи и гладкость решения

На интервале $\Omega = (0, 1)$ рассматривается модельное уравнение 4-го порядка

$$Au \equiv D^2(x^\alpha a(x) D^2 u) + x^\beta b(x) u = f(x), \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(0) = Du(0) = u(1) = Du(1) = 0. \tag{2}$$

Параметры $\alpha$ и $\beta$ описывают степенные особенности коэффициентов дифференциального оператора $A$.

Далее предполагаются выполненными условия на коэффициенты уравнения: $\alpha < 1$ (условие слабого вырождения); $\beta + 4 - \alpha > 0$; $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq 0$; $a$, $b$ – достаточно гладкие функции (их гладкость определяется ниже).

Положим $\widehat{u}(x) = u(x)/\sigma(x)$, где $u$ – решение задачи (1), (2), $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. Определим оператор $\widehat{A}$ формулой $\widehat{A}\widehat{u} = A(\sigma\widehat{u})$. Вместо исходной задачи рассмотрим задачу о нахождении функции $\widehat{u}$:

$$\widehat{A}\widehat{u}(x) = f(x), \quad \sigma\widehat{u}|_{x=0} = D(\sigma\widehat{u})|_{x=0} = \widehat{u}(1) = D\widehat{u}(1) = 0. \tag{3}$$

Для решения $\widehat{u}$ справедлива теорема гладкости

**Теорема 3.** *Пусть $\alpha - 5/2 - s < \gamma < 1/2$, $a \in W^{s+2}_\infty$, $x^{\beta+2-\alpha} b \in W^s_\infty$. Тогда оператор $\widehat{A}$ осуществляет изоморфизм пространства $H^{s+4}_{\gamma-2} \cap \dot{H}^2_\gamma$ на $H^s_\gamma$. При этом для решения задачи* (3) *выполняются граничные условия $x^{4-\alpha} D^2\widehat{u}(x)\big|_{x=0} = 0$, $D\left(x^{4-\alpha} D^2\widehat{u}(x)\right)\big|_{x=0} = 0$.*

**Доказательство.** Оператор $\widehat{A}$ представим в виде $\widehat{A} = \widehat{A}_0 + B$, где

$$\widehat{A}_0\widehat{u}(x) = D^2\bigl(x^\alpha a(x) D^2(\sigma(x)\widehat{u}(x))\bigr), \quad B\widehat{u}(x) = x^{\beta+2-\alpha} b(x)\widehat{u}(x).$$

При выполнении условий теоремы на коэффициенты $a$ и $b$ непосредственным дифференцированием проверяется, что операторы $\widehat{A}_0$, $B$ и $\widehat{A}$ непрерывны из $H^{s+4}_{\gamma-2}$ в $H^s_\gamma$.

Покажем, что оператор $\widehat{A}_0$ является изоморфизмом пространства $H^{s+4}_{\gamma-2} \cap \dot{H}^2_\gamma$ на $H^s_\gamma$, а оператор $B$ компактен из $H^{s+4}_{\gamma-2}$ в $H^s_\gamma$. Тогда оператор $\widehat{A} = \widehat{A}_0 + B$ будет компактным возмущением изоморфизма $\widehat{A}_0$. Так как однородное уравнение $\widehat{A}\widehat{u} = Au = 0$ имеет только тривиальное решение (это следует из эллиптичности оператора $A$), то в силу альтернативы Фредгольма оператор $\widehat{A} : H^{s+4}_{\gamma-2} \cap \dot{H}^2_\gamma \to H^s_\gamma$ будет изоморфизмом.

Пусть $f \in H^s_\gamma$. Дважды интегрируя уравнение (1) с $b(x) \equiv 0$, получим $x^\alpha a(x) D^2 u(x) = p(x) + f_1(x)$, где $p(x)$ – полином первой степени, который подбирается из граничных условий в точке $x = 1$, функция $f_1(x)$ такая, что $D^2 f_1 = f$, $f_1 \in H^{s+2}_\gamma$. Положим $g(x) = \dfrac{p(x) + f_1(x)}{a(x)}$. Тогда $g \in H^{s+2}_\gamma$, так как $a \in W^{s+2}_\infty$ и $a(x) \geq a_0 > 0$. Поскольку $\alpha - j < \min(1, \gamma - j + s + 2 + 1/2)$ для $j = 0, 1, \ldots, s+2$, то $D^j g \in \operatorname{dom} K_{\alpha-j}$. Следовательно, $x^{-\alpha} g \in L_1(0,t)$ для любого $t \in (0,1)$, и с учетом граничных условий в точке $x = 0$ получим

$$u(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y t^{-\alpha} g(t)\, dt\, dy,$$

соответственно,

$$\widehat{u}(x) = x^{\alpha-2} \int\limits_0^x y^{1-\alpha} y^{\alpha-1} \int\limits_0^y t^{-\alpha} g(t)\, dt\, dy = K_{\alpha-1} K_\alpha g.$$

Используя формулы дифференцирования оператора Харди (теорема 2) и условие $\alpha - 5/2 - s < \gamma$, будем иметь:

$$D^{s+2}\widehat{u} = D^{s+2}(K_\alpha g - K_{\alpha-1} g) = K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g - K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g \in L_{2,\gamma},$$

$$D^{s+3}\widehat{u} = \frac{D^{s+2}g}{x} + \frac{\alpha-s-3}{x} K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g - \frac{D^{s+2}g}{x} - \frac{\alpha-s-4}{x} K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g =$$
$$= \frac{4+s-\alpha}{x} K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g - \frac{3+s-\alpha}{x} K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g \in L_{2,\gamma-1},$$

$$D^{s+4}\widehat{u} = \frac{(4+s-\alpha)(\alpha-s-5)}{x^2} K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g -$$
$$- \frac{(3+s-\alpha)(\alpha-s-4)}{x^2} K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g + \frac{D^{s+2}g}{x^2} \in L_{2,\gamma-2}.$$

Следовательно, $\widehat{u} \in H^{s+4}_{\gamma-2}$, и в силу непрерывности операторов Харди справедлива оценка $\|\widehat{u}|H^{s+4}_{\gamma-2}\| \le c\|f|H^s_\gamma\|$. Поскольку при $\gamma < 1/2$ выполнены вложения $H^{s+4}_{\gamma-2} \subset \subset H^{s+2}_\gamma \subset H^2_\gamma$, то с учетом граничных условий для $\widehat{u}$ в точке $x = 1$ получим, что $\widehat{u} \in H^{s+4}_{\gamma-2} \cap \dot{H}^2_\gamma$. Таким образом, оператор $\widehat{A}_0$ есть изоморфизм пространства $H^{s+4}_{\gamma-2} \cap \dot{H}^2_\gamma$ на $H^s_\gamma$.

Проверим выполнение естественных граничных условий в точке $x = 0$. Так как

$$D^2\widehat{u} = K_{\alpha-2}D^2 g - K_{\alpha-3}D^2 g \in H^s_\gamma,$$

то при $x \to 0$

$$x^{4-\alpha}D^2\widehat{u} = x\int_0^x t^{2-\alpha}D^2 g(t)\,dt - \int_0^x t^{3-\alpha}D^2 g(t)\,dt \to 0$$

и

$$D(x^{4-\alpha}D^2\widehat{u}) = \int_0^x t^{2-\alpha}D^2 g(t)\,dt + xx^{2-\alpha}D^2 g(x) - x^{3-\alpha}D^2 g(x) =$$
$$= \int_0^x t^{2-\alpha}D^2 g(t)\,dt \to 0.$$

Наконец покажем, что оператор $B : H^{s+4}_{\gamma-2} \to H^s_\gamma$ компактен. Справедливо равенство

$$D^s B\widehat{u}(x) = \sum_{j=0}^{s} C^j_s D^{s-j}(x^{\beta+2-\alpha}b(x))D^j\widehat{u}(x). \tag{4}$$

Пространство $H^{s+1-j}_\gamma$ компактно вложено в $L_{2,\gamma}$ (теорема 1), следовательно, оператор $D^j : H^{s+1}_\gamma \to L_{2,\gamma}$ компактен для $j = 0, 1, \ldots, s$. Из условия $x^{\beta+2-\alpha}b \in \in W^s_\infty$ следует, что все производные $D^k(x^{\beta+2-\alpha}b)$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$ ограничены на $\overline{\Omega}$. Из равенства (4) и теоремы 1 (утверждение (v)) вытекает компактность оператора $B : H^{s+4}_{\gamma-2} \subset H^{s+1}_\gamma \to H^s_\gamma$. □

**Следствие 1.** *Если $a$, $x^{\beta+2-\alpha}b$, $f$ – функции класса $C^\infty[0,1]$, то функция $\widehat{u} \in C^\infty[0,1]$.*

**Доказательство.** Из теоремы 3 при $\gamma = 0$ и вложения $H^{s+4}_{-2} \subset H^{s+2}$ следует оценка $\|\widehat{u}|H^{s+2}\| \le c\|f|H^s\|$. Так как $H^{s+2} \subset C^{s+1}$, то $\widehat{u} \in C^{s+1}[0,1]$ для любого $s$, то есть $\widehat{u} \in C^\infty[0,1]$. □

Из теоремы 3 вытекает, что решение $\widehat{u}$ задачи (3) является гладкой функцией и ее гладкость зависит только от гладкости правой части $f$ и коэффициентов $a$, $x^{\beta+2-\alpha}b$ и не зависит от степени вырождения $\alpha$, тогда как у решения $u$ исходной задачи при $\alpha > 0$ вторая производная в окрестности точки вырождения $x = 0$, вообще говоря, бесконечна.

### 3. Вариационная формулировка задачи

Рассмотрим обобщенную постановку исходной задачи (1), (2) на пространстве $V = \overset{\circ}{H}{}^{2}_{-\alpha/2}$ с нормой $\|u|V\| = \left( \int\limits_\Omega x^\alpha \big(D^2 u\big)^2\, dx \right)^{1/2}$. Определим билинейную форму $\mathfrak{a}$ на пространстве $V \times V$ и линейный функционал $\mathfrak{f}$ на пространстве $V$ по формулам

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int\limits_\Omega \big(x^\alpha a D^2 u D^2 v + x^\beta b u v\big)\, dx, \quad \mathfrak{f}(v) = \int\limits_\Omega f v\, dx.$$

Под обобщенным решением двухточечной краевой задачи (1), (2) будем понимать функцию $u \in V$, которая удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{a}(u,v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall\, v \in V. \tag{5}$$

**Теорема 4.** *Если $\gamma \geq \alpha/2 - 2 - s$, то решение $u \in V$ задачи* (5) *существует и единственно для любой правой части $f \in H^s_\gamma$.*

**Доказательство.** Покажем непрерывность билинейной формы $\mathfrak{a}$:

$$|\mathfrak{a}(u,v)| \leq \int\limits_\Omega |x^\alpha a D^2 u D^2 v + x^\beta b u v|\, dx \leq \int\limits_\Omega |x^\alpha a D^2 u D^2 v|\, dx + \int\limits_\Omega |x^\beta b u v|\, dx \leq$$

$$\leq c_1 \Big[ \Big( \int\limits_\Omega x^\alpha \big(D^2 u\big)^2\, dx \Big)^{1/2} \Big( \int\limits_\Omega x^\alpha \big(D^2 v\big)^2\, dx \Big)^{1/2} +$$

$$+ \Big( \int\limits_\Omega x^\beta u^2\, dx \Big)^{1/2} \Big( \int\limits_\Omega x^\beta v^2\, dx \Big)^{1/2} \Big] \leq c\|u|V\|\|v|V\|,$$

поскольку $V \subset L_{2,-\beta/2}$ при $\beta + 4 - \alpha > 0$. Эллиптичность формы $\mathfrak{a}$ на пространстве $V$ следует из неравенств

$$\mathfrak{a}(u,u) \geq \int\limits_\Omega x^\alpha a \big(D^2 u\big)^2\, dx \geq a_0 \|u|V\|^2.$$

Так как $V \subset L_{2,2-\alpha/2}$, то линейный функционал $\mathfrak{f}$ непрерывен на $V$, если $f \in$ $\in L_{2,\alpha/2-2} \subset V^*$. А это выполнено, поскольку $H^s_\gamma \subset L_{2,\alpha/2-2}$ при $\gamma \geq \alpha/2 - 2 - s$. Из свойств билинейной формы $\mathfrak{a}$ и линейного функционала $\mathfrak{f}$ следует, что вариационное уравнение (5) однозначно разрешимо. □

Положим $\widehat{V} = \dot{H}^2_{\alpha/2-2}$. Через $\sigma$ обозначим линейный оператор умножения на функцию $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. В [12] доказана

**Лемма 1.** *Оператор $\sigma$ является изоморфизмом пространства $\widehat{V}$ на пространство $V$.*

Из леммы 1 следует, что вариационная задача (5) на гильбертовом пространстве $V$ эквивалентна вариационной задаче на гильбертовом пространстве $\widehat{V}$: найти функцию $\widehat{u} \in \widehat{V}$ такую, что

$$\widehat{\mathfrak{a}}(\widehat{u}, \widehat{v}) = \widehat{\mathfrak{f}}(\widehat{v}) \quad \forall\, \widehat{v} \in \widehat{V}, \tag{6}$$

где $\widehat{\mathfrak{a}}(\widehat{u}, \widehat{v}) = \mathfrak{a}(\sigma u, \sigma v)$, $\widehat{\mathfrak{f}}(\widehat{v}) = \mathfrak{f}(\sigma v)$. При этом решения задач (5) и (6) связаны между собой соотношением $u = \sigma \widehat{u}$.

## 4. Аппроксимация задачи конечными элементами

На отрезке $[0,1]$ зададим набор узлов $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Данный набор точек образует разбиение $\mathcal{T}_h = \{e_k\}_{k=1}^n$ отрезка $[0,1]$ на конечные элементы $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ с шагом $h = \max\limits_{k=1,\ldots,n} h_k$, где $h_k = x_k - x_{k-1}$. Предполагается существование постоянной $\mu > 0$, не зависящей от $h$, что $h_{k+1} \le \mu h_k$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Пусть $m \ge 3$ – натуральное число. Определим пространство конечных элементов $S_h^{m,1}$ как множество функций класса $C^1$, сужение каждой из которых на произвольный конечный элемент $e_k \in \mathcal{T}_h$ есть полином степени $m$, то есть

$$S_h^{m,1} \equiv S^{m,1}(\mathcal{T}_h) = \{\varphi \in C^1[0,1] : \ \varphi\big|_{e_k} \in P_m(e_k) \ \forall\, e_k \in \mathcal{T}_h\}.$$

Пусть выполнены условия: $\alpha/2 - (m-1) < \gamma < 1/2$, $a \in W_\infty^{m-1}$, $x^{\beta+2-\alpha} b \in \in W_\infty^{m-3}$, $f \in H_\gamma^{m-3}$. Поскольку $1/2 > \gamma > \alpha/2 - (m-1) > \alpha - (m-3) - 5/2$, то по теореме 3 решение краевой задачи (1), (2) можно записать в виде $u = \sigma \widehat{u}$, где функция $\widehat{u}$ – решение вариационной задачи (6), причем имеет место оценка $\|\widehat{u}|H_{\gamma-2}^{m+1}\| \le c\|f|H_\gamma^{m-3}\|$.

Положим $\widehat{V}_h = S_h^{m,1} \cap \widehat{V} = \{\widehat{v} \in S_h^{m,1} : \ \widehat{v}(1) = D\widehat{v}(1) = 0\}$, $V_h = \sigma \widehat{V}_h$.

Через $u_h \in V_h$ обозначим приближение Галеркина для задачи (5), то есть функция $u_h$ является решением вариационного уравнения

$$\mathfrak{a}(u_h, v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall\, v \in V_h. \tag{7}$$

В качестве приближенного решения задачи (6) возьмем функцию $\widehat{u}_h \in \widehat{V}_h$ такую, что

$$\widehat{\mathfrak{a}}(\widehat{u}_h, \widehat{v}) = \widehat{\mathfrak{f}}(\widehat{v}) \quad \forall\, \widehat{v} \in \widehat{V}_h. \tag{8}$$

Тогда $u_h = \sigma \widehat{u}_h$, и для погрешности приближения в энергетической норме справедлива оценка:

$$\|u - u_h|V\| \sim \sqrt{\mathfrak{a}(u - u_h, u - u_h)} = \sqrt{\widehat{\mathfrak{a}}(\widehat{u} - \widehat{u}_h, \widehat{u} - \widehat{u}_h)} \sim \|\widehat{u} - \widehat{u}_h|\widehat{V}\|.$$

**Теорема 5.** *Пусть* $\alpha/2 - (m-1) < \gamma < 1/2$, $a \in W_\infty^{m-1}$, $x^{\beta+2-\alpha} b \in W_\infty^{m-3}$. *Тогда для* $f \in H_\gamma^{m-3}$ *справедлива оценка погрешности метода*

$$\|u - u_h|V\| \le c h^\theta \|f|H_\gamma^{m-3}\|, \tag{9}$$

*где* $\theta = \min(m-1, m-1+\gamma-\alpha/2)$.

**Доказательство.** Используя лемму Сеа [17, с. 109], весовые оценки конечноэлементной аппроксимации [18] и теорему 3 для $s = m-3$, получим оценку (9):

$$\|u - u_h|V\| \sim \|\widehat{u} - \widehat{u}_h|\widehat{V}\| \le c_1 \inf_{\varphi \in \widehat{V}_h} \|\widehat{u} - \varphi|\widehat{V}\| \le c_2 h^\theta \|D^{m+1}\widehat{u}|L_{2,\gamma-2}\| \le$$

$$\le c_3 h^\theta \|\widehat{u}|H_{\gamma-2}^{m+1}\| \le c h^\theta \|f|H_\gamma^{m-3}\|.$$

□

**Следствие 2.** *Если* $a \in W_\infty^{m-1}$, $x^{\beta+2-\alpha} b, f \in W_\infty^{m-3}$, *то*

$$\|u - u_h|V\| \sim \|\widehat{u} - \widehat{u}_h|\widehat{V}\| \le c h^{m-1} \|f|W_\infty^{m-3}\|.$$

Справедливость утверждения непосредственно вытекает из теоремы, поскольку при $\alpha < 1$ имеет место вложение $W_\infty^{m-3} \subset H_{\alpha/2}^{m-3}$.

## 5. Результаты численных экспериментов

Пусть $(X,\rho)$ – полное метрическое пространство. Если для некоторой последовательности $(v_j)$ и элемента $v$ из $X$ выполнена оценка $\rho(v_j,v)\le cq^{-j}$, где $j=0,1,\ldots,\ q>1$, то имеет место неравенство

$$\rho(v_j,v_{j+1})\le\rho(v_j,v)+\rho(v,v_{j+1})\le(c+cq^{-1})q^{-j}.$$

Справедливо и обратное утверждение

**Лемма 2.** *Если для некоторой последовательности $v_j\in X$ выполнено неравенство $\rho(v_j,v_{j+1})\le c_1q^{-j},\ j=0,1,\ldots,\ q>1$, то существует единственный элемент $v\in X$ такой, что $\rho(v_j,v)\le c_2q^{-j}$.*

**Доказательство.** Для любых целых неотрицательных $j$ и натуральных $s$ имеем цепочку неравенств

$$\rho(v_j,v_{j+s})\le\rho(v_j,v_{j+1})+\rho(v_{j+1},v_{j+2})+\cdots+\rho(v_{j+s-1},v_{j+s})\le$$
$$\le\left(c_1\sum_{i=0}^{s-1}q^{-i}\right)q^{-j}\le\left(c_1\sum_{i=0}^{\infty}q^{-i}\right)q^{-j}=c_1\frac{q}{(q-1)}q^{-j}=c_2q^{-j},\quad(10)$$

откуда следует, что последовательность $(v_j)$ фундаментальна. Так как пространство $X$ полное, то у этой последовательности существует предел, который обозначим через $v$. Переходя в неравенстве (10) к пределу при $s\to\infty$, получим оценку $\rho(v_j,v)\le c_2q^{-j}$. □

Пусть $m$ – степень полиномов на конечном элементе, $\widehat{u}_n,\ \widehat{u}_{2n}$ – решения (8) на равномерной сетке, состоящей из $n$ и $2n$ конечных элементов соответственно. Тогда по лемме 2 при $q=2^{m-1},\ n=n_02^j$ ($n_0$ – начальное число конечных элементов) из неравенства $\|\widehat{u}_n-\widehat{u}_{2n}|\widehat{V}\|\le c_1n^{1-m}$ следует, что $\|\widehat{u}_n-\widehat{u}|\widehat{V}\|\le c_2n^{1-m}$. Таким образом, проверка ограниченности величин $n^{m-1}\|\widehat{u}_n-\widehat{u}_{2n}|\widehat{V}\|$ может служить тестом на сходимость метода с порядком $m-1$. В табл. 1 эти величины вычислены для $a(x)=1+x,\ b(x)=x,\ \beta=\alpha,\ f(x)=1+x$.

Табл. 1

| $m$ | $\alpha\setminus n$ | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | –0.5 | 2.0e–3 | 1.6e–3 | 1.5e–3 | 1.4e–3 | 1.4e–3 | 1.4e–3 |
| 3 | 0 | 2.9e–3 | 2.3e–3 | 2.0e–3 | 1.9e–3 | 1.8e–3 | 1.8e–3 |
| 3 | 0.2 | 3.5e–3 | 2.8e–3 | 2.4e–3 | 2.2e–3 | 2.1e–3 | 2.1e–3 |
| 3 | 0.5 | 4.6e–3 | 3.9e–3 | 3.5e–3 | 3.1e–3 | 2.8e–3 | 2.6e–3 |
| 3 | 0.9 | 6.6e–3 | 6.3e–3 | 6.0e–3 | 5.8e–3 | 5.6e–3 | 5.5e–3 |
| 4 | –0.5 | 2.7e–4 | 2.7e–4 | 2.7e–4 | 2.7e–4 | 2.7e–4 | 2.7e–4 |
| 4 | 0 | 3.3e–4 | 3.3e–4 | 3.3e–4 | 3.3e–4 | 3.3e–4 | 3.4e–4 |
| 4 | 0.2 | 3.5e–4 | 3.6e–4 | 3.6e–4 | 3.6e–4 | 3.7e–4 | 3.7e–4 |
| 4 | 0.5 | 4.0e–4 | 4.0e–4 | 4.0e–4 | 4.0e–4 | 4.0e–4 | 4.1e–4 |
| 4 | 0.9 | 4.7e–4 | 4.8e–4 | 4.9e–4 | 4.9e–4 | 4.9e–4 | 5.0e–4 |

## Заключение

Схемы МКЭ, основанные на мультипликативном выделении особенности для рассматриваемой задачи, имеют в энергетической норме оптимальную скорость сходимости $O(h^{m-1})$ на классе правых частей из $W_\infty^{m-3},\ m\ge3$. Данный метод является эффективным как в регулярном случае $\alpha=\beta=0$, так и в случае вырождения, тогда как стандартный МКЭ при $0 < \alpha < 1$ для сколь угодно гладкой правой части и любого $m \geq 3$ приводит к существенно худшей сходимости $O(h^{(1-\alpha)/2})$, которая не улучшается с повышением гладкости входных данных и степени полиномов $m$ на конечном элементе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-97015, 10-01-00728).

**Summary**

*A.A. Sobolev, M.R. Timerbaev.* On Finite Element Method of High-Order Accuracy for Two-Point Degenerated Dirichlet Problem of 4th Order.

In this paper two-point boundary value problem for a differential equation of 4th order with degeneration is considered. This problem is solved by the finite element method of high-order accuracy with a multiplicative separation of singularity. The optimal convergence rate of the presented method for a given class of smoothness of the right-hand sides is proved.

**Key words:** two-point boundary value problem, weighted Sobolev space, finite element method, multiplicative decomposition of singularity.

**Литература**

1. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
2. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 257, № 2. – С. 278–282.
3. *Кыдыралиев С.К.* О повышении гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 529–531.
4. *Тимербаев М.Р.* Весовые оценки решения задачи Дирихле с анизотропным вырождением на части границы // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 1. – С. 60–73.
5. *Гусман Ю.А., Оганесян Л.А.* Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т. 5, № 2. – С. 351–357.
6. *Franchi B., Tesi M.K.* A finite element approximation for a class of degenerate elliptic equations // Math. of Comp. – 1999. – V. 69, No 229. – P. 41–63.
7. *Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р.* Оценки точности схем МКЭ для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 7. – С. 1210–1215.
8. *Тимербаев М.Р., Ляшко А.Д.* Об оценках погрешности схем МКЭ для квазилинейных вырождающихся уравнений 2-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1239–1243.
9. *Тимербаев М.Р.* Конечноэлементная аппроксимация вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка в области с криволинейной границей // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 9. – С. 78–86.
10. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р.* Метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся уравнений 4-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 2. – С. 232–237.
11. *Тимербаев М.Р.* Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 7. – С. 1086–1093.

12. *Тимербаев М.Р.* О схемах МКЭ для 2-точечной граничной задачи Дирихле 4-го порядка со слабым вырождением // Исслед. по прикл. матем. и инф. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – Вып. 25. – С. 78–85.

13. *Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р.* Схемы МКЭ высокого порядка точности для неоднородной двухточечной граничной задачи с вырождением // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 63–75.

14. *Кудрявцев Л.Д.* Об эквивалентных нормах в весовых пространствах // Тр. МИАН им. Стеклова. – 1984. – Т. 170, Ч. 10. – С. 161–190.

15. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

16. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

17. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

18. *Тимербаев М.Р.* Конечноэлементная аппроксимация в весовых пространствах Соболева // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 11. – С. 76–84.

Поступила в редакцию
25.01.10

**Тимербаев Марат Равилевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *marat.timerbaev@ksu.ru*

**Соболев Андрей Анатольевич** – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *andreyasob@yandex.ru*